Chapitre II

Modèles Dynamiques

Introduction

1. Modèles dynamiques à effets fixes

2. La méthode des GMM

Arellano et Bond furent les premiers en 1991, dans un article de la *Review of Economic Studies*, à proposer une extension de la Méthode des Moments Généralisés[1] (*MMG*, ou *Generalized Method of Moments, GMM*), au cas des données de panels.

2.1. L'approche d'Arellano et Bond (1991)

Considérons tout d'abord un modèle simple de type $AR(1)$, sans variable exogène dans le cadre d'un panel cylindré, $\forall\, i \in [1, N]$ et $\forall\, t \in [1, T]$:

$$y_{i,t} = \gamma y_{i,t-1} + \alpha_i + \varepsilon_{i,t} \qquad |\gamma| < 0 \tag{2.1}$$

On dispose d'un échantillon de N individus sur T périodes. Etant donné les propriétés des panels dynamiques évoquées dans la section précédente, nous considérerons le cas où la dimension temporelle T est petite (T fixe), tandis que la dimension individuelle est très importante ($N \to \infty$). On considère que les effets individuels α_i sont fixes et l'on pose les hypothèses traditionnelles sur les résidus :

Hypothèse (H1) *On suppose que les résidus* $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i,1}...\varepsilon_{i,T})'$ *sont i.i.d. et satisfont les conditions suivantes : (i)* $E(\varepsilon_i) = 0$, *(ii)* $E(\varepsilon_i \varepsilon_i') = \sigma_\varepsilon^2 I_T$ *où* I_T *désigne la matrice identité.*

Sous ces hypothèses, les valeurs retardées de $y_{i,t-k}$, pour $k \geq 2$, constituent[2] des instruments valides dans l'estimation des paramètres du modèle (2.1) spécifié en différences premières :

$$\Delta y_{i,t} = \gamma \Delta y_{i,t-1} + v_{i,t} \qquad |\gamma| < 0 \tag{2.2}$$

avec $v_{i,t} = \varepsilon_{i,t} - \varepsilon_{i,t-1}$. Lorsque l'on dispose de plus de 3 données dans la dimension temporelle, ce modèle implique de tester *pour chaque individu* des restrictions linéaires du type :

[1]Introduite initiallement par Hansen (1982), "*Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators*", Econometrica, vol 50, n°4, p 1029-1054. Pour une synthèse, voir Fève et Langot (1995), "*La méthode des Moments Généralisés et ses Extensions*", Economie et Prévision, 119, p 139-168.

[2]En effet, sous H_1, on sait que $y_{i,t-2} = \gamma y_{i,t-3} + \varepsilon_{i,t-2}$ n'est pas corrélé avec $\Delta y_{i,t}$ qui dépend de $v_{i,t} = \varepsilon_{i,t} - \varepsilon_{i,t-1}$.

- Date $t = 3$, $\forall\, i \in [1, N]$

$$E\left[v_{i,3}y_{i,1}\right] = E\left[\left(\Delta y_{i,3} - \gamma \Delta y_{i,2}\right) y_{i,1}\right] = 0$$

- Date $t = 4$, $\forall\, i \in [1, N]$

$$E\left[v_{i,4}y_{i,1}\right] = E\left[\left(\Delta y_{i,4} - \gamma \Delta y_{i,5}\right) y_{i,2}\right] = 0$$

$$E\left[v_{i,4}y_{i,2}\right] = E\left[\left(\Delta y_{i,4} - \gamma \Delta y_{i,5}\right) y_{i,2}\right] = 0$$

- ....

- Date $t = T$, $\forall\, i \in [1, N]$

$$E\left[v_{i,T}y_{i,1}\right] = E\left[\left(\Delta y_{i,T} - \gamma \Delta y_{i,T-1}\right) y_{i,1}\right] = 0$$

$$....$$

$$E\left[v_{i,T}y_{i,T-3}\right] = E\left[\left(\Delta y_{i,T} - \gamma \Delta y_{i,T-1}\right) y_{i,T-3}\right] = 0$$

$$E\left[v_{i,T}y_{i,T-2}\right] = E\left[\left(\Delta y_{i,T} - \gamma \Delta y_{i,T-1}\right) y_{i,T-2}\right] = 0$$

Ainsi on obtient, pour chaque individu, on obtient $m = (T-2)(T-1)/2$ *restrictions linéaires*[3]. De façon plus générale, ces restrictions peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$E\left[\left(\Delta y_{i,t} - \gamma \Delta y_{i,t-1}\right) y_{i,t-j}\right] = 0 \quad j = 2, ..., t-1; t = 3, ..., T \tag{2.3}$$

L'idée d'Arellano et Bond (1991) consiste alors à déterminer un estimateur optimal de γ dans un panel avec $N \to \infty$ et T fixe, uniquement à partir de ces m restrictions linéaires[4]. Ils appliquent alors la méthode des moments généralisés de Hansen (1982) et White (1982). Pour cela, les conditions identifiantes (2.3)peuvent se récrire sous la forme vectorielle suivante $\forall\, i \in [1, N]$:

$$E\left(\widetilde{Y}_i' v_i\right) = 0 \tag{2.4}$$

avec $v_i = (v_{i,3}, ..., v_{i,T})'$ et où la matrice $\widetilde{Y}_i$ de dimension $(T-2) \times m$, bloc diagonale où le $s^{ème}$ bloc est défini par $(y_{i,1}, ..., y_{i,s})$:

$$\underset{(T-2,m)}{\widetilde{Y}_i} = \begin{pmatrix} y_{i1} & 0 & 0 & ... & & & & & \\ 0 & y_{i,1} & y_{i,2} & ... & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & & & & & \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & y_{i,1} & ... & y_{i,T-3} & y_{i,T-2} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

[3] En effet, sachant que $\sum_i^T i = T(T+1)/2$, on obtient ici $\sum_i^{T-2} i = (T-1)(T-2)/2$ contraintes linéaires.

[4] Arellano et Bond ne considèrent pas les restrictions liées aux moments quadratiques de la forme $E(v_{i,t}v_{i,t-2}) = 0$.

L'estimateur des GMM de γ est alors construit à partir des moments empiriques obtenus à partir de l'échantillon :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\widetilde{Y}_i'v_i=\frac{1}{N}\widetilde{Y}'v \tag{2.6}$$

où $v=(v_1',..,v_N')'$ est un vecteur de dimension $N(T-2)$ et $\widetilde{Y}=\left(\widetilde{Y}_1',...,\widetilde{Y}_N'\right)'$ est une matrice de dimension $N(T-2)\times m$.

Proposition 2.1. *Conditionnellement à une norme A_N, l'estimateur des GMM du paramètre γ, noté $\widehat{\gamma}$, est la valeur du paramètre α qui minimise la distance :*

$$\widehat{\gamma}=\arg\min_{\gamma}\left(v'\widetilde{Y}\right)A_N\left(\widetilde{Y}'v\right)=\frac{y_{-1}'\widetilde{Y}A_N\widetilde{Y}'y}{y_{-1}'\widetilde{Y}A_N\widetilde{Y}'y_{-1}} \tag{2.7}$$

L'application du théorème central limite multivarié permet alors de montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{N}}V_N^{-1/2}\widetilde{Y}'v\underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}}\mathcal{N}(0,I_N)$$

où I_N est la matrice identité $(N\times N)$ et où la matrice V_N désigne la moyenne des matrices de variance covariance des écarts $\widetilde{Y}_i'v_i$.

$$V_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left[\left(\widetilde{Y}_i'v_i\right)\left(\widetilde{Y}_i'v_i\right)'\right]$$

Sous les hypothèses *H1*, la matrice V_N peut être remplacée par son estimateur :

$$\widehat{V}_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\widetilde{Y}_i'\widehat{v}_i\widehat{v}_i'\widetilde{Y}_i' \tag{2.8}$$

où les résidus $\widehat{v}_i$ ont été obtenus à partir d'un estimateur convergent préliminaire, noté par la suite $\widehat{\gamma}_1$.

A. Annexes

A.1. Demo 1

Bibliographie