

## Chapitre 3

# Identification des Processus ARMA

La méthode d'identification de Box et Jenkins (1976) est fondée sur la comparaison des moments empiriques de la série considérée aux moments théoriques associés aux différentes représentations potentielles. On se concentre ici sur les moments d'ordre deux résumés par la fonction d'autocorrélation (FAC) et la fonction d'autocorrélation partielle (FAP).

## 1. Fonction d'autocorrélation et fonction d'autocorrélation partielle

### 1.1. Fonction d'autocorrélation

#### 1.1.1. Définition

**Definition 1.1.** La fonction d'autocorrélation d'un processus  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ , de moyenne  $E(x_t) = m$ , notée  $\rho(k)$  ou  $\rho_k$ , est définie par  $\forall k \in \mathbb{Z}$  :

$$\rho(k) = \rho_k = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \quad (1.1)$$

avec  $\rho(k) \in [-1, 1]$ , et où  $\gamma(k) = \gamma_k$  désigne la fonction d'autocovariance,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  :

$$\gamma(k) = \gamma_k = E[(x_t - m)(x_{t-k} - m)]$$

**Remark 1.** Les fonctions  $\gamma(k)$  et  $\rho(k)$  sont symétriques  $\forall k \in \mathbb{Z}$  :  $\gamma(k) = \gamma(-k)$  et  $\rho(k) = \rho(-k)$

#### 1.1.2. Estimateur

**Definition 1.2.** L'estimateur de la fonction d'autocorrélation, noté  $\hat{\rho}(k)$  ou  $\hat{\rho}_k$ , obtenu pour un échantillon de  $T$  réalisations du processus  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ , est donné par  $\forall k \in \mathbb{Z}$  :

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} \quad (1.2)$$

où  $\hat{\gamma}(k)$  (ou  $\hat{\gamma}_k$ ) désigne l'estimateur de la fonction d'autocovariance  $\forall k \in \mathbb{Z}^+$

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} (x_t - \bar{x}_t)(x_{t-k} - \bar{x}_{t-k})$$

avec

$$\bar{x}_{t-k} = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} x_t$$

D'après le théorème central limite, la variable centré  $t_{\rho_k}$  suit une loi normale centrée réduite :

$$t_{\rho_k} = \frac{\widehat{\rho}_k - \rho_k}{V(\widehat{\rho}_k)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

où  $V(\widehat{\rho}_k)$  désigne l'estimateur de la variance empirique des estimateurs  $\widehat{\rho}_k$  :

$$V(\widehat{\rho}_k) = \frac{1}{T} \sum_{j=-K}^K \widehat{\rho}_j^2 \quad \text{avec } K < k \quad (1.4)$$

En utilisant la symétrie des  $\rho_k$ , on montre que :

$$V(\widehat{\rho}_k) = \frac{1}{T} \left( 1 + 2 \sum_{j=1}^K \widehat{\rho}_j^2 \right) \quad (1.5)$$

**Proposition 1.3.** La statistique de Student associée au test  $H_0 : \rho_k = 0$ , est donnée par :

$$t_{\widehat{\rho}_k} = \frac{\widehat{\rho}_k}{V(\widehat{\rho}_k)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Au seuil  $\alpha = 5\%$ , si  $|t_{\widehat{\rho}_k}| \geq 1.96$ , on rejette l'hypothèse  $H_0$ , c'est à dire la nullité de  $\rho_k$ .

## 1.2. Fonction d'autocorrélation partielle

### 1.2.1. Définition

L'autocorrélation partielle d'ordre  $k$  désigne la corrélation entre  $x_t$  et  $x_{t-k}$  obtenue lorsque l'influence des variables  $x_{t-k-i}$ , avec  $i < k$ , a été retirée.

**Définition 1.4.** L'autocorrélation partielle d'ordre  $k$  d'un processus  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$ , de moyenne  $E(x_t) = m$ , notée  $p(k)$  ou  $p_k$ , est définie par le dernier coefficient de la projection linéaire de  $x_{t+1}$  sur ces  $k$  plus récentes valeurs.  $\forall k \in \mathbb{Z}$  :

$$x_{t+1} - m = c_1(x_t - m) + c_2(x_{t-1} - m) + \dots + c_{k-1}(x_{t-k+1} - m) + p_k(x_{t-k+1} - m) \quad (1.6)$$

ou de façon équivalente par :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdot & \gamma_{k-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdot & \gamma_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \cdot & \gamma_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \cdot \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdot & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdot & \rho_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdot & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \rho_k \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

**Remark 2.** Pour un processus centré, la FAP est une fonction telle que  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $p(k) \in [-1, 1]$

**Corollary 1.5.** De façon générale, la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus stationnaire  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  satisfait la relation

$$p_k = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

avec

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdot & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{k-1} & \cdot & & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdot & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdot & \rho_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{k-1} & \cdot & & \rho_k \end{pmatrix}$$

**Remark 3.** Les trois premières autocorrélations partielles sont donc déterminées par les relations suivantes :

$$p_1 = \rho_1 \quad (1.9)$$

$$p_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \quad (1.10)$$

$$p_3 = \frac{\rho_1^3 - \rho_1 \rho_2 (2 - \rho_2) + \rho_3 (1 - \rho_1^2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2 (1 - \rho_2)} \quad (1.11)$$

### 1.2.2. Estimation

**Proposition 1.6.** Un estimateur naturel  $\hat{p}_k$  de l'autocorrélation partielle  $p_k$  du processus  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  consiste en l'estimateur des MCO du dernier paramètre de la régression :

$$x_{t+1} = \hat{c} + \hat{p}_1 x_t + \hat{p}_2 x_{t-1} + \dots + \hat{p}_k x_{t-k+1} + \hat{\varepsilon}_t \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.12)$$

A partir de la relation (??), une autre façon d'obtenir les estimateurs  $\widehat{p}_k$  consiste à utiliser les estimateurs des autocorrélations  $\widehat{\rho}_k$  de la façon suivante :

$$\widehat{p}_k = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (1.13)$$

avec

$$P_k = \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\rho}_1 & \cdot & \widehat{\rho}_{k-1} \\ \widehat{\rho}_1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \widehat{\rho}_{k-1} & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \widehat{\rho}_1 & \cdot & \widehat{\rho}_1 \\ \widehat{\rho}_1 & 1 & \cdot & \widehat{\rho}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \widehat{\rho}_{k-1} & \cdot & \cdot & \widehat{\rho}_k \end{pmatrix}$$

### 1.2.3. Cas particulier d'un AR(p)

Pour un AR(p) les coefficients  $\widehat{p}_k$  pour  $k > p$ , sont distribués selon une loi normale de moyenne nulle et de variance :

$$\text{var}(\widehat{p}_k) \cong \frac{1}{T} \quad \forall k > p$$

## 2. Les caractéristiques des processus AR(p)

On considère un processus  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  stationnaire représenté par un AR(p) tel que :

$$x_t = c + \phi_1 x_{t-1} \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

avec  $\varepsilon_t$  *i.i.d.*  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . On pose

$$\Phi(L)x_t = c + \varepsilon_t$$

avec

$$\Phi(L) = \phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 \dots - \phi_p L^p$$

avec  $\phi_0 = 1$ .

Si le processus  $x_t$  est stationnaire, alors toutes les racines du polynôme  $\Phi(L)$  sont strictement supérieures à 1 en module, ce qui implique en particulier que  $\Phi(1) \neq 0$ , dès lors

$$m = E(x_t) = \frac{c}{\Phi(1)} = \frac{c}{\phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i} = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 \dots - \phi_p} \quad (2.1)$$

## 2.1. Fonction d'autocorrélation

**Proposition 2.1.** *Les autocovariances et les autocorrélations d'un processus AR(p) ( $x_t, t \in \mathbb{Z}$ ) satisfont la même équation aux différences homogènes que le processus lui-même.*

### 2.1.1. Fonction d'autocovariance

On cherche tout d'abord à déterminer la fonction d'autocovariance

$$\gamma_k = E[(x_t - m)(x_{t-k} - m)] \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

**Proposition 2.2.** *La fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  d'un processus AR(p) ( $x_t, t \in \mathbb{Z}$ ) satisfait une relation de récurrence de la forme :*

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 - \dots - \phi_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} & k > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

avec  $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$

*Preuve :* On considère la définition de  $x_t$  :

$$x_t = c + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.4)$$

D'après la définition de la fonction  $\gamma_k$ , on a  $\forall k > 0$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E[(x_t - m)(x_{t-k} - m)] \\ &= E(cx_{t-k}) + \phi_1 E(x_{t-1}x_{t-k}) + \dots + \phi_p E(x_{t-p}x_{t-k}) + E(\varepsilon_t x_{t-k}) \\ &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \end{aligned}$$

puisque  $E(\varepsilon_t x_{t-k}) = 0$  car  $x_{t-k}$  ne dépend que des  $\varepsilon_{t-k-j}$  avec  $j \geq 0$ . De la même façon :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E[(x_t - m)^2] = E(cx_t) + \phi_1 E(x_{t-1}x_t) + \dots + \phi_p E(x_{t-p}x_t) + E(\varepsilon_t x_t) \\ &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + E(x_t \varepsilon_t) \\ &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

car  $E(x_t \varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$  puisque  $x_t$  peut s'écrire sous la forme d'une somme pondérée des chocs passés (théorème de Wold) :

$$x_t = \Phi(L)^{-1} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad \text{avec } \theta_0 = 1$$

### 2.1.2. Fonction d'autocorrélation

On sait que par définition :

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \quad (2.5)$$

**Proposition 2.3.** La fonction d'autocorrélation, notée  $\rho(k)$  ou  $\rho_k$ , d'un processus AR( $p$ ) ( $x_t, t \in \mathbb{Z}$ ) satisfait une relation de récurrence de la forme :

$$\Phi(L)\rho_k = 0 \iff \rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \dots + \phi_p\rho_{k-p} & \forall k \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \quad (2.6)$$

Ces relations sont connues sous le nom d'équations de Yule-Walker .

L'autocorrélation d'ordre  $k$  est donc déterminée par une équation aux différences homogènes d'ordre  $k$  dont on peut donner la solution générale.

**Proposition 2.4.** Si le polynôme  $\Phi(L)$  admet  $p$  racines distinctes  $(\lambda_i)_{i=1}^p$ , l'autocorrélation d'ordre  $k$  est déterminée par la relation

$$\rho_k = A_1 \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^k + A_2 \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^k + \dots + A_p \left(\frac{1}{\lambda_p}\right)^k \quad (2.7)$$

où les paramètres  $(A_i)_{i=1}^p$  sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

**Corollary 2.5.** Suivant les valeurs des racines  $\lambda_i$  on obtient deux cas :

- Si  $\lambda_i$  est une racine réelle telle que  $|\lambda_i| > 1$ , alors le produit  $A_i\lambda_i^{-k}$  décroît avec  $k$  et tend vers 0 (exponentielle amortie).
- Si  $\lambda_i$  est une racine complexe de module strictement supérieur à l'unité, on obtient alors une sinusoidale amortie.

## 2.2. Fonction d'autocorrélation partielle

**Proposition 2.6.** Les autocorrélations partielles, notés  $p_k$ , d'un processus  $AR(p)$   $x_t = c + \phi_1 x_{t-1} \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$  sont nulles pour tout ordre supérieur à  $p$  ( $p_k = 0, \forall k > p$ ) et non nulles pour tout ordre inférieur à  $p$ . De plus on a

$$p_p = \phi_p \quad (2.8)$$

*Preuve :* Il suffit d'identifier membres à membres les termes de la définition de la FAC et celle du processus  $x_t$ .

$$x_t = c + \phi_1 x_{t-1} \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

ce qui peut se récrire sous la forme

$$x_{t+1} - m = \phi_1 (x_t - m) \dots + \phi_p (x_{t-p+1} - m) + \varepsilon_t$$

Dès lors le dernier coefficient de la projection linéaire de  $x_{t+1}$  sur les  $p$  plus récentes valeurs est égal à  $\phi_p$ .

**Remark 4.** La fonction d'autocorrélation partielle d'un  $AR(p)$  s'annule à l'ordre  $p + 1$

## 3. Les caractéristiques des processus $MA(q)$

On considère un processus  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  stationnaire, d'espérance  $E(x_t) = m$ , représenté par un  $MA(q)$  tel que :

$$x_t = m + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (3.1)$$

avec  $\varepsilon_t$  *i.i.d.*  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . On pose

$$x_t = c + \Theta(L) \varepsilon_t$$

avec

$$\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 \dots - \theta_p L^p$$

avec  $\theta_0 = 1$ .

### 3.1. Fonction d'autocorrélation

#### 3.1.1. Fonction d'autocovariance

**Proposition 3.1.** La fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  d'un processus  $MA(q)$  ( $x_t, t \in \mathbb{Z}$ ) défini par  $x_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$  est donnée par la relation :

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q) \sigma_\varepsilon^2 & 0 < k \leq q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (3.2)$$

*Preuve :* Pour obtenir ce résultat, il suffit de rappeler que  $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}) = 0$  si  $j \neq 0$  et  $E(\varepsilon_{t-j}^2) = \sigma_\varepsilon^2, \forall j$ . On a :

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= E[(x_t - m)(x_{t-k} - m)] \\ &= E[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1\varepsilon_{t-1-k} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q-k})] \end{aligned}$$

En développant cette expression on retrouve le résultat général énoncé ci-dessus.

#### 3.1.2. Fonction d'autocorrélation

**Proposition 3.2.** La fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  d'un processus  $MA(q)$  ( $x_t, t \in \mathbb{Z}$ ) défini par  $x_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$  est donnée par la relation :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & 0 < k \leq q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (3.3)$$

**Remark 5.** La fonction d'autocorrélation d'un  $MA(q)$  s'annule à l'ordre  $q + 1$

### 3.2. Fonction d'autocorrélation partielle

**Proposition 3.3.** La fonction d'autocorrélation partielle  $p_k$  d'un processus  $MA(q)$  ( $x_t, t \in \mathbb{Z}$ ) défini par  $x_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$  se comporte comme une exponentielle ou une sinusoidale amortie.

## 4. Les caractéristiques des processus ARMA $(p, q)$

On considère un processus  $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  stationnaire, d'espérance  $E(x_t) = m$ , représenté par un ARMA  $(p, q)$  tel que :

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} \dots - \phi_p x_{t-p} = m + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (4.1)$$

avec  $\varepsilon_t$  *i.i.d.*  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . On pose

$$\Phi(L)x_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t$$

### 4.1. Fonction d'autocorrélation

#### 4.1.1. Fonction d'autocovariance

**Proposition 4.1.** *La fonction d'autocovariance  $\gamma_k$  d'un processus stationnaire ARMA  $(p, q)$   $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  satisfait une relation de récurrence de la forme :*

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad \forall k > q \quad (4.2)$$

On a donc la même relation de récurrence que pour un AR  $(p)$  (équations de Yule Walker), mais cette dernière n'est valable que pour des ordres supérieurs à  $q$ . Cette relation n'est pas valable pour  $k \leq q$  en raison de la corrélation entre  $x_{t-j}$  et  $\theta_j \varepsilon_{t-j}$ .

#### 4.1.2. Fonction d'autocorrélation

**Proposition 4.2.** *La fonction d'autocorrélation  $\rho_k$  d'un processus stationnaire ARMA  $(p, q)$   $(x_t, t \in \mathbb{Z})$  satisfait une relation de récurrence de la forme :*

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \forall k > q \quad (4.3)$$

Tout comme pour le cas de l'AR  $(p)$ , on peut obtenir une solution à cette équation. Lorsque les  $p$  racines sont distinctes, cette solution est de la forme

$$\rho_k = A_1 \left( \frac{1}{\lambda_1} \right)^k + A_2 \left( \frac{1}{\lambda_2} \right)^k + \dots + A_p \left( \frac{1}{\lambda_p} \right)^k \quad \forall k > q \quad (4.4)$$

où les paramètres  $(A_i)_{i=1}^p$  sont des constantes déterminées par les conditions initiales et où les paramètres  $(\lambda_i)_{i=1}^p$  désignent les  $p$  racines distinctes du polynôme associé à la composante

autoregressive du processus :  $\Phi(L) = 0$ . Mais dans ce cas les valeurs initiales  $(\rho_1 \dots \rho_q)$  sont différentes de celles obtenus pour l'AR( $p$ ) et les constantes  $(A_i)_{i=1}^p$  sont donc elles mêmes différentes.